Grundbegriffe der medizinischen Biometrie und Epidemiologie (Sommer 2014)
Übungsblatt 3 für den 15.5.2014

1 Aufgabe: Schätzer für den Erwartungswert

Eine Grundgesamtheit besitze Erwartungswert μ und Varianz σ^2. Die Stichprobenvariablen $X_1, ..., X_5$ sind unabhängige Ziehungen aus der Grundgesamtheit. Man betrachte folgende fünf Schätzer für den Erwartungswert μ:

- $$T1 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + ... + X_5)$$
- $$T2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$
- $$T3 = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5$$
- $$T4 = X_1 + X_2$$
- $$T5 = X_1$$

1. Welcher Schätzer ist erwartungstreu?
2. Welchen Schätzer würden Sie verwenden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 Aufgabe: Maximum Likelihood Schätzung

Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die folgende Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$$

Nun werden insgesamt n unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Stichprobenelemente $x_1, ..., x_n$ beobachtet.

1. Man bestimme die (log)Likelihood-Funktion $f(x; \mu, \sigma^2)$ der Parameter μ und σ^2 für die Beobachtungen $x_1, ..., x_n$.
2. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten Mittelswertsparameter μ.
3. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten Varianzparameter σ^2.

3 Aufgabe: Erwartungstreue

Gegeben sei eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsstichprobe $X_1, ..., X_n$.

1. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei bekannt und $\sigma^2 = Var(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

2. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei unbekannt und $\sigma^2 = Var(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

   Mit dem Mittelwertschätzer $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

3. Leiten Sie nun mithilfe des Teilergebnisses 2.2 den erwartungstreuen Schätzer (Stichprobenvarianz) für die Varianz bei unbekanntem Mittelwert her.

4 Aufgabe: Schätzer in der Bernoulliverteilung

$X_1, ..., X_n$ sind unabhängige, identische Wiederholungen einer Zufallsvariable X, die einer Bernoulliverteilung folgt, mit

- $$P(X = 1) = \pi$$
- $$P(X = 0) = 1 - \pi$$

Es gilt: $E(X) = \pi$ und $Var(X) = \pi(1 - \pi)$

1. Zeigen Sie, dass $\hat{\pi} = \sum_{i=1}^{n} X_i/n = \bar{X}$ erwartungstreu ist.

2. Man bestimme die mittlere, quadratische Abweichung (MSE) des Schätzers $\bar{X}$ für $\pi \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.

3. Eine alternative Schätzfunktion ist

$$T = (1 - \lambda)\, \bar{X} + \lambda\, \frac{1}{2}$$

   mit

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}\, .$$

   Berechnen Sie den Erwartungswert des Schätzer und überprüfen Sie, ob T erwartungstreu ist.

4. Berechnen Sie den MSE von T. Vergleichen Sie den MSE von T mit dem MSE von $\bar{X}$. Welchen Schätzer (T oder $\bar{X}$) würden Sie in welcher Situation verwenden?