UNIVERSITÄT LEIPZIG

Eine Einführung in R: Dichten und Verteilungsfunktionen

Bernd Klaus, Verena Zuber
Institut für Medizinische Informatik, Statistik und Epidemiologie (IMISE),
Universität Leipzig

http://www.uni-leipzig.de/ zuber/teaching/ws12/r-kurs/

8. November 2012

Einschub: Zufallsvariablen

Eine Variable oder Merkmal X, dessen Werte die Ergebnisse eines Zufallsvorganges sind, heißt Zufallsvariable.

Notation:

- X: Die Zufallsvariable
- x: Eine Realisierung oder Beobachtung der Zufallsvariable

Induktive (Schließende) Statistik:

Mittels einer Stichprobe wird versucht Aussagen bezüglich einer Grundgesamtheit zu treffen.

- Grundgesamtheit: Menge aller für die Fragestellung relevanten Objekte
- Stichprobe: Tatsächlich untersuchte Teilmenge der Grundgesamtheit

Die Aussagen beziehen sich auf Merkmale der Grundgesamtheit.

- Merkmal: Die interessierende Größe oder Variable
- Merkmalsausprägung: Der konkret gemessene Wert an einem Objekt der Stichprobe

Das Model: Theoretische Ebene

- Statistische Analysen beruhen auf Modellannahmen.
- Ziel: Formalisierung eines reellen Sachverhaltes
    - Stetige Variablen mit Erwartungswert und Varianz
    - Diskrete Variablen mit Gruppenzugehörigkeiten
- Parametrischer Ansatz: Verteilungsannahmen, wie eine Zufallsvariable X ist normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2
- Non-Parametrischer Ansatz: Ohne Verteilungsannahmen

Die beobachteten Daten: Die empirische Ebene

- Erwartungswert und Varianz einer Grundgesamtheit können nicht in der Realität beobachtet werden, sondern müssen aus der Stichprobe geschätzt werden.
- Beobachtet werden n Realisierungen $x_1, ..., x_n$ einer Zufallsstichprobe X.
- Notation:
  - Erwartungswert μ
  - Schätzer für den Erwartungswert $\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$
- Gesetz der großen Zahlen: "Je mehr Realisierungen einer Zufallszahl beobachtet werden, desto besser approximiert der Mittelwert den Erwartungswert"
- Realisierungen einer Zufallsvariable folgen nicht exakt einer bestimmten Verteilung. Nur bei großer Stichprobenzahl nährt sich die empirische Dichte der theoretischen an.

Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$

Die Normal- oder Gauß-Verteilung ist formalisiert durch Erwartungswert μ und Varianz σ^2:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

- Diese Funktion ist in R implementiert:
  `dnorm(x, mean=0, sd=1)`
  (Vorsicht: mean steht hier für den Erwartungswert)
- Erzeugen von n Realisierungen $x_1, \ldots, x_n$:
  `rnorm(n, mean=0, sd=1)`

Beispiel: Normalverteilung

- Darstellung: Gesetz der großen Zahlen

```
x10<-matrix(rnorm(100),nrow=10,ncol=10)
x1000<-matrix(rnorm(10000),nrow=10,ncol=1000)
apply(x10,MARGIN=1, mean)
```

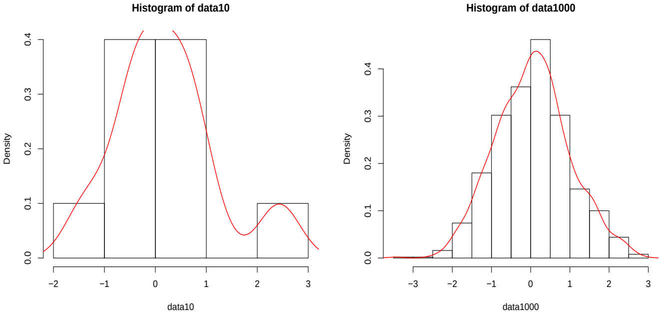
  -0.392 -0.309 0.195 -0.727 -0.150 0.327 0.142 0.020 0.069 0.594

```
apply(x1000,MARGIN=1, mean)
```

  -0.018 -0.011 0.007 -0.011 -0.021 -0.013 0.036 0.026 0.074 0.010

Beispiel: Normalverteilung

- Anpassung der empirischen an die theoretische Verteilung:



I. Diskrete Daten

Eine Zufallsvariable heißt diskret, wenn sie endlich viele Werte $x_1, \ldots, x_k$ annehmen kann.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X ist für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch die Wahrscheinlichkeiten p_i:

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x_i) = p_i & \text{falls } x = x_i \in \{x_1, \ldots, x_k\} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die Verteilungsfunktion $F(x)$ einer diskreten Zufallsvariable ist gegeben durch die Summe:

$$F(y) = P(X \leq y) = \sum_{i : x_i \leq y} f(x_i)$$

Eigenschaften

Für die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ gilt:

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

$$\sum_{i \geq 1} p_i = 1$$

Für die Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & x \geq max(x) \\ 0 & x \leq min(x) \end{cases}$$

F(x) ist monoton steigend mit Wertebereich 0 bis 1.

Bernoulli-Experiment

Binäre Zufallsvariable X: Tritt ein Ereignis A ein?

$$X = \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt} \\ 0 & \text{falls } A \text{ nicht eintritt} \end{cases}$$

Das Ereignis A tritt mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit $0 < \pi < 1$ ein

$$P(X = 1) = \pi$$
$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung entspricht dem n-maligen Durchführen eines Bernoulli-Experimentes mit Wahrscheinlichkeit π

$$f(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \pi^x (1-\pi)^{n-x} & \text{falls } x = 0, 1, ..., n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Ein Schütze schießt $n = 10$ mal auf eine Torwand. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er genau fünfmal trifft, wenn er eine Trefferwahrscheinlichkeit π von 25 % hat?

$$P(X = 5) = \binom{10}{5} 0.25^5 (1 - 0.25)^{10-5} = 0.058$$

Diskrete Gleichverteilung

Die diskrete Gleichverteilung charakterisiert die Situation, dass $x_1, \ldots, x_k$-verschiedene Werte mit gleicher Wahrscheinlichkeit angenommen werden.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{falls } x_i \text{ mit } i = 1, ..., k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Beispiel

Würfeln, jede Zahl hat die gleiche Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

II. Stetige Daten

Eine Zufallsvariable heißt stetig, wenn sie unendlich viele Werte $x_1, \ldots, x_k, \ldots$ annehmen kann, wie beispielsweise metrische Variablen.

Die Dichte $f(x)$ einer stetigen Zufallsvariable X ist für ein Intervall $[a, b]$ definiert als:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) \partial x$$

Die Verteilungsfunktion $F(y)$ einer stetigen Zufallsvariable ist gegeben durch das Integral:

$$F(y) = P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f(x) \partial x$$

Eigenschaften

Für die Dichte $f(x)$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\partial x = 1$$

$$P(X = a) = \int_{a}^{a} f(x)\partial x = 0$$

Für die Verteilungsfunktion $F(x)$ gilt:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \geq \max(x) \\ 0 & \text{für } x \leq \min(x) \end{cases}$$

$$F'(x) = \frac{\partial F(X)}{\partial x} = f(x)$$

Normalverteilung $N(\mu, \sigma)$

Eine der wichtigsten Verteilungen ist die Normal- oder Gauß-Verteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2:

$$f(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

- Symmetrisch um μ
- Nur abhängig von μ und σ
- Beispiele: Klausurnoten, das (logarithmierte) Einkommen, Messfehler, Größe und Gewicht

Stetige Gleichverteilung $U(a, b)$

Gegeben: ein Intervall, definiert durch reelle Zahlen a und b mit $a < b$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Die stetige Gleichverteilung spielt eine wichtige Rolle bei statistischen Tests.

Hat man $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen einer Variablen X mit Verteilungsfunktion F, so gilt:

$$F(x_1), \ldots, F(x_n) \sim U(0, 1)$$

III. Umgang mit Zufallszahlen

`R` ermöglicht den Umgang mit Zufallszahlen.
Beispiel: (Standard)Normalverteilung

1. Ziehen von n Zufallszahlen: `rnorm(n, mean=0, sd=1)`
2. Dichte im Wert x: `dnorm(x, mean=0, sd=1)`
   Beispiel: `dnorm(c(-1,0,1))`
   `0.24197 0.39894 0.24197`
3. Verteilungsfunktion im Wert x:
   `pnorm(x, mean=0, sd=1)`
   Beispiel: `pnorm(c(-1,0,1))`
   `0.15866 0.50000 0.84134`
4. Quantil für Wahrscheinlichkeit p:
   `qnorm(p, mean=0, sd=1)`
   Beispiel: `qnorm(c(0.25,0.5,0.75))`
   `-0.67449 0.00000 0.67449`

Beispiel: (Standard)Normalverteilung

1. Dichte im Wert x:

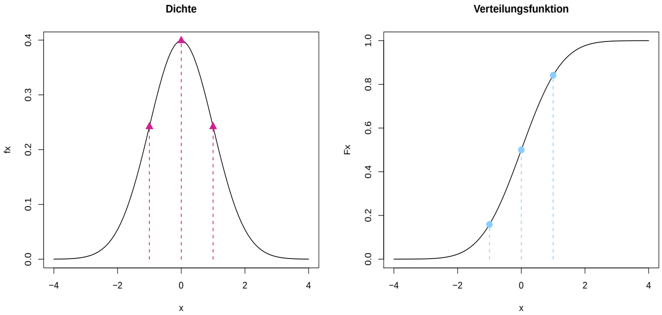
   ```
   dnorm(c(-1,0,1))
   ```

   0.24197 0.39894 0.24197

2. Verteilungsfunktion im Wert x:

   ```
   pnorm(c(-1,0,1))
   ```

   0.15866 0.50000 0.84134



R-Befehle für weitere Verteilungen

- `rnorm(n, mean=0, sd=1)` Normalverteilung mit Mittelwert `mean` und Standardabweichung `sd`
- `rexp(n, rate=1)` Exponentialverteilung mit Rate `rate`
- `rpois(n, lambda)` Poissonverteilung mit Rate `lambda`
- `rcauchy(n, location=0, scale=1)` Cauchyverteilung mit Lokations- und Skalenparameter
- `rt(n, df)`(Studen)t-verteilung mit Freiheitsgraden `df`
- `rbinom(n, size, prob)` Binomialverteilung vom Umfang `size` und Wahrscheinlichkeit `prob`
- `rgeom(n, prob)` Geometrische Verteilung mit Wahrscheinlichkeit `prob`
- `rhyper(nn, m, n, k)` Hypergeometrische Verteilung
- `runif(n, min=0, max=1)` Stetige Gleichverteilung im Intervall [`min, max`]

Darstellung: Histogramme und Kerndichteschätzer

1. Histogramme: Darstellung von stetigen und diskreten Verteilungen

   ```
   hist(x, breaks = “AnzahlBins”, freq = NULL )
   ```

   - `x`: Daten
   - `breaks = “AnzahlBins”`: Steuerung der Teilintervalle
   - `freq=TRUE`: absolute Häufigkeiten
   - `freq=FALSE`: relative Häufigkeiten (“empirische Dichte”)

2. Kerndichteschätzer: Darstellung von stetigen Verteilungen

   ```
   plot(density(x, kernel=“gaussian”, bw))
   ```

   - `density(x)`: Kerndichteschätzung der Daten
   - `kernel`: Option für spezielle Kerntypen
   - `bw`: Bandbreite

Darstellung: Kerndichteschätzer

Kerndichteschätzer sind aus dem Histogramm abgeleitete Verfahren zur Schätzung von stetigen Dichten

Hat man gegebene Daten $x_1, \ldots, x_n$ und eine konstante Bandbreite $h \in \mathbb{R}$ so ist der Kerndichteschätzer gegeben durch:

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{h} K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)$$

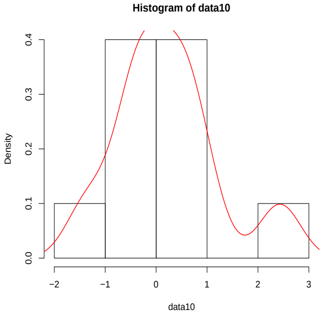
Typische Kerne sind:

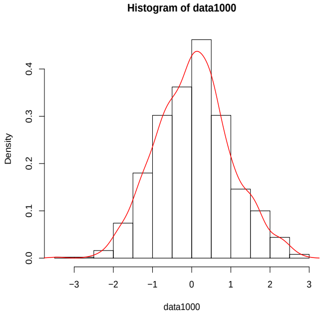
- Bisquare Kern:
  $K(u) = \frac{15}{16}(1 - u^2)^2$ für $u \in [-1, 1]$ und 0 sonst
- Gauß Kern: $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}u^2\right)$ für $u \in \mathbb{R}$

Beispiel: Simulation aus der Normalverteilung

```
data10<-rnorm(10)
hist(data10, freq=FALSE)
lines(density(data10), col=2)
```

```
data1000<-rnorm(1000)
hist(data1000, freq=FALSE)
lines(density(data1000), col=2
```



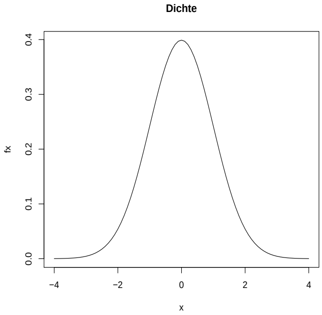


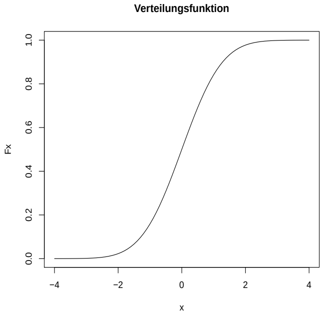
Beispiel: Wie plottet man die Normalverteilung?

```
x<-seq(from=-4, to=4, by=0.1)
```

```
♯ Dichte
fx<-dnorm(x)
plot(x,fx, type="l")
```

```
♯ Verteilungsfunktion
Fx<-pnorm(x)
plot(x,Fx, type="l")
```





Darstellung: Q-Q-Plot

Quantil-Quantil-Plots tragen die Quantile (empirisch oder theoretisch) zweier Verteilungen gegeneinander ab. Somit können Verteilungen miteinander verglichen werden.

- `qqplot(x,y)`: Plottet die emp. Quantile von `x` gegen die emp. Quantile von `y`
- `qqnorm(y)`: Plottet die emp. Quantile von `y` gegen die theoretischen Quantile einer Standard-Normalverteilung
- `qqline(y)`: Fügt dem Quantilplot eine Gerade hinzu die durch das erste und dritte Quartil geht

Bsp: Vergleich von Normal- und t-Verteilung

```
data <- rt(400, df = 2)
qqnorm(data, main = “QQ-Plot”, xlab= “Normalverteilung”,
ylab = “t-Verteilung”)
qqline(data, col = “green”)
```

Darstellung: Q-Q-Plot