

1 Aufgabe: Schätzer für den Erwartungswert

Eine Grundgesamtheit besitze Erwartungswert μ und Varianz σ^2 . Die Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_5 sind unabhängige Ziehungen aus der Grundgesamtheit. Man betrachte folgende fünf Schätzer für den Erwartungswert μ :

•

$$T1 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + \dots + X_5)$$

•

$$T2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

•

$$T3 = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5$$

•

$$T4 = X_1 + X_2$$

•

$$T5 = X_1$$

1. Welcher Schätzer ist erwartungstreu?
2. Welchen Schätzer würden Sie verwenden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

2 Aufgabe: Maximum Likelihood Schätzung

Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die folgende Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Nun werden insgesamt n unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Stichprobenelemente x_1, \dots, x_n beobachtet.

1. Man bestimme die (log)Likelihood-Funktion $f(x; \mu, \sigma^2)$ der Parameter μ und σ^2 für die Beobachtungen x_1, \dots, x_n .
2. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekanntem Mittelwertparameter μ .
3. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekanntem Varianzparameter σ^2 .

3 Aufgabe: Erwartungstreue

Gegeben sei eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsstichprobe X_1, \dots, X_n .

1. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei bekannt und $\sigma^2 = Var(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$$

2. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei unbekannt und $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

Mit dem Mittelwertschätzer $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$

3. Leiten Sie nun mithilfe des Teilergebnisses 2.2 den erwartungstreuen Schätzer (Stichprobenvarianz) für die Varianz bei unbekanntem Mittelwert her.

4 Aufgabe: Schätzer in der Bernoulliverteilung

X_1, \dots, X_n sind unabhängige, identische Wiederholungen einer Zufallsvariable X , die einer Bernoulliverteilung folgt, mit

•

$$P(X = 1) = \pi$$

•

$$P(X = 0) = 1 - \pi$$

Es gilt: $E(X) = \pi$ und $\text{Var}(X) = \pi(1 - \pi)$

1. Zeigen Sie, dass $\hat{\pi} = \sum_{i=1}^n X_i/n = \bar{X}$ erwartungstreu ist.
2. Man bestimme die mittlere, quadratische Abweichung (MSE) des Schätzers \bar{X} für $\pi \in \{0, 0.25, 0.5, 0.75, 1\}$.
3. Eine alternative Schätzfunktion ist

$$T = (1 - \lambda) \bar{X} + \lambda \frac{1}{2}$$

mit

$$\lambda = \frac{1}{1 + \sqrt{n}}.$$

Berechnen Sie den Erwartungswert des Schätzer und überprüfen Sie, ob T erwartungstreu ist.

4. Berechnen Sie den MSE von T . Vergleichen Sie den MSE von T mit dem MSE von \bar{X} . Welchen Schätzer (T oder \bar{X}) würden Sie in welcher Situation verwenden?