UNIVERSITÄT LEIPZIG

Eine Einführung in R: Statistische Tests

Bernd Klaus, Verena Zuber
Institut für Medizinische Informatik, Statistik und Epidemiologie (IMISE),
Universität Leipzig

http://www.uni-leipzig.de/ zuber/teaching/ws11/r-kurs/

10. November 2011

1. Einführungsbeispiel
2. Theorie: Statistische Tests
   - Hypothesen aufstellen
   - Betrachtung der Daten
   - Aufstellen der Prüfgröße
   - Durchführen des Tests
   - Testentscheidung
3. Tests auf Mittelwertsunterschiede: t-Test und Wilcoxon-Rangsummen - Test
   - t-Test - gegen festen Wert
   - t-Test - Vergleich zweier Populationen
   - t-Test - Messwiederholung
   - Der Wilcoxon-Rangsummen - Test
4. t-Test und Wilcoxon-Rangsummen - Test in `R`

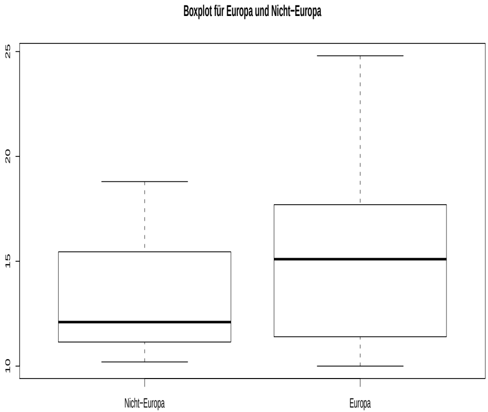
Fragestellung

Einführungsbeispiel: Trinkt die Jugend in Europa mehr Alkohol als im Rest der Welt?

Untersucht wird die Variable ***Alkohol*** im **oec**d-Datensatz:
Der Anteil an 13-15 jährigen Jugendlichen, die mindestens zweimal betrunken waren

Erster Schritt: Deskriptive Analyse

1. Graphisch mit dem Boxplot
   `boxplot(Alkohol~Geo)`



2. Kennzahlen, wie
   - **Mittelwert**

     ```
     mu<-tapply(Alkohol, Geo, FUN=mean, na.rm=TRUE)
     ```

Nicht-Europa	**Europa**
13.700	15.443

   - **Standardabweichung**

     ```
     sigma<-tapply(Alkohol, Geo, FUN=sd, na.rm=TRUE)
     ```

Nicht-Europa	**Europa**
4.518	4.341

Es ist zu erkennen, dass in Europa im Mittel ein höherer Anteil an Jugendlichen schon mindestens zweimal betrunken war als in nicht-europäischen Staaten.

Doch dies könnte auch ein Zufall sein!
Denn die Beobachtungen beruhen auf Stichproben,
sie sind Realisierungen einer Zufallsvariable.

Eigentliches Ziel:
Überprüfung von Annahmen über das Verhalten des interessierenden Merkmales in der Grundgesamtheit mittels Stichproben.

- **Annahme:** Jugendliche in Europa trinken mehr Alkohol als im Rest der Welt
- **Merkmal:** Alkoholkonsum der Jugend
- **Grundgesamtheit:** Jugendliche in Europa und im Rest der Welt
- **Stichprobe:** Die *oecd*-Daten

Für solche Fragestellungen mit gleichzeitiger Kontrolle der Fehlerwahrscheinlichkeit sind statistische Tests geeignet!

Statistisches Testen I

1. **Aufstellen von zwei komplementären Hypothesen:**
   - **Testhypothese** (H_0): Der Anteil in Europa ist kleiner dem im Rest der Welt $\mu_E \leq \mu_{NE}$
   - **Alternativhypothese** (H_1): Der Anteil in Europa größer als der im Rest der Welt $\mu_E > \mu_{NE}$
2. **Fehlerwahrscheinlichkeit festlegen:**
   H_0 soll mit einer W'keit von weniger als 5% abgelehnt werden, wenn H_0 wahr ist.

Also: wenn der Anteil in Wahrheit kleiner oder gleich ist, soll der Test nur mit einer W'keit von weniger als 5% zu dem (falschen) Ergebnis kommen, dass der Anteil größer ist.

Statistisches Testen II

3. **Beobachtete Daten: 2 Gruppen**

	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	n
Nicht-Europa	13.700	4.518	3
Europa	15.443	4.341	21

4. **(Weitere Annahmen: Normalverteilung, Varianzgleichheit)**
5. **Berechnen der Prüfgröße T, einer Kennzahl, die zeigt, wie stark die Gruppenmittel voneinander abweichen:**
   (a) Mittelwertsdifferenz der beiden Gruppen
   (b) Standardisieren mit der entsprechenden Standardabweichung

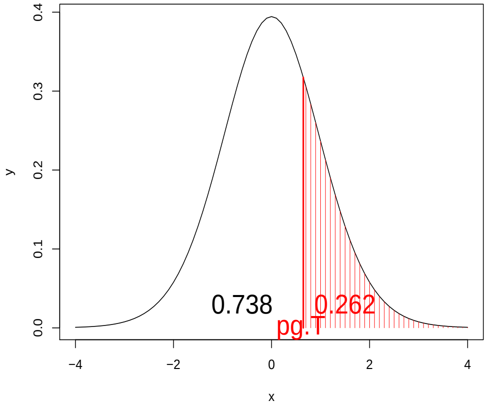
$$T = (\hat{\mu}_E - \hat{\mu}_{NE}) / \sqrt{\left(\frac{1}{n_E} + \frac{1}{n_{NE}}\right) \frac{(n_E - 1)\hat{\sigma}_E^2 + (n_{NE} - 1)\hat{\sigma}_{NE}^2}{n_E + n_{NE} - 2}}$$

   (c) (Hypothetische Verteilung der Prüfgröße festlegen, hier t-Verteilung mit $3 + 21 - 2 = 22$ Freiheitsgraden)

Statistisches Testen III

6. **Berechnung der Prüfgröße T in R:**
   (a) Mittelwertsdifferenz der beiden Gruppen
   ```
   m.diff<-mu[2]-mu[1]
   ```
   (b) Standardisieren mit der entsprechenden Standardabweichung
   ```
   diff.std2 <- sqrt((1/21+1/3)*
   (20*sigma[2]^2+2*sigma[1]^2)/(21+3-2))
   ```
   (c) Prüfgröße:
   ```
   pg.T <-m.diff/diff.std
   0.648
   ```
7. **Wie wahrscheinlich ist es (unter der Nullhypothese), eine Prüfgröße T zu beobachten, die größer oder gleich** 0.648 **ist?**
   ```
   1-pt(pg.T, df=22)
   0.262
   ```

Statistisches Testen IV

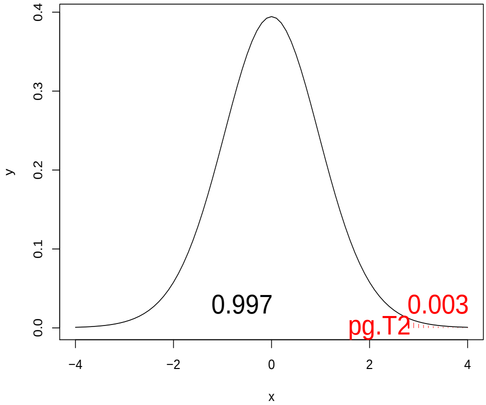


Mit hoher W'keit (26.2%) kann eine solche Prüfgröße `pg.T` beobachtet werden, wenn der Mittelwert in Europa und kleiner als der in Nicht-Europa ist.

Statistisches Testen V

8. **Entscheidung:** Aus diesen Daten kann nicht geschlossen werden, dass in Europa Jugendliche mehr Alkohol trinken als im Rest der Welt.
9. **Grund:** Zu geringe Fallzahl!
   Mit $n_E = n_{NE} = 101$ ergibt sich
   (b) Standardisieren mit der entsprechenden Standardabweichung
   ```
   diff.std <- sqrt((1/101+1/101)*
   (100*sigma[2]^2+100*sigma[1]^2)/(101+101-2))
   ```
   (c) Prüfgröße:
   ```
   pg.T2 <-m.diff/diff.std2
   2.796
   ```
   (d) Vergleich mit der t-Verteilung:
   ```
   1-pt(pg.T2, df=200)
   0.003
   ```

Statistisches Testen IV



Mit nur sehr geringer W'keit (0.003%) kann eine solche Prüfgröße `pg.T2` beobachtet werden, wenn der Mittelwert in Europa und kleiner als der in Nicht-Europa ist.

Der Baukasten für statistische Test: Wie geht man vor?

Fünf Schritte zum Testergebnis

I. Hypothesen aufstellen
II. Betrachtung der Daten
III. Aufstellen der Prüfgröße
IV. Durchführen des Tests
V. Testentscheidung

Hypothesen aufstellen

- **Was soll verglichen werden?**
  - Gegen einen festen Wert
  - Zwei Gruppen (t-Test)
  - Messwiederholungen
- **Einseitige oder zweiseitige Fragestellung?** Beispiel:
  - Einseitige Fragestellung :
    $H_0 : \mu_1 \leq \mu_2$ gegen $H_1 : \mu_1 > \mu_2$
  - Zweiseitige Fragestellung :
    $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ gegen $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$
- **Aufstellen der eigentlich interessierenden Alternativhypothese H_1 und der Nullhypothese H_0.**
- **Signifikanzniveau α festlegen.**

Welche Fehler kann man beim Testen machen?

	Entscheidung: H_0	**Entscheidung:** H_1
H_0 **wahr**	richtig	Fehler 1. Art (α)
H_1 **wahr**	Fehler 2. Art (β)	richtig

- **Fehler erster Art** (α-Fehler):
  Obwohl H_0 wahr ist, entscheidet man sich für H_1 (***False Positive***)
- **Fehler zweiter Art** (β-Fehler):
  Obwohl H_1 wahr ist, entscheidet man sich für H_0 (***False Negative***)

II. Betrachtung der Daten

- **Können Verteilungsannahmen getroffen werden?**
  - Ja: Parametrische Tests
  - Nein: Nonparametrische Tests
- **Weitere Annahmen wie z.B. Varianzgleichheit in den Gruppen...**

Aus Schritt I. und II. folgen alle weiteren Schritte!

Aufstellen der Prüfgröße

- **Aus den Hypothesen ergibt sich die Form der Prüfgröße,**
  z.B. die Mittelwertsdifferenz
- **Standardisieren mit**
  - unter H_0 gültigen Erwartungswert
  - unter H_0 gültigen Standardabweichung
- **Festlegen der Verteilung, die unter H_0 gültig ist.**

Durchführen des Tests und V. Testentscheidung

Hier sind zwei Werte entscheidend:

- **Kritischer Wert κ:** Welchen Wert darf die Prüfgröße maximal annehmen, wenn H_0 tatsächlich gültig ist.
- ***p*-Wert:** Wahrscheinlichkeit, die vorliegenden Daten zu beobachten, wenn H_0 gültig ist.

Entscheidung: H_0 ablehnen, falls

- die Prüfgröße größer als der kritische Wert ist (Vorsicht bei nonparametrischen Tests: hier kleiner als der kritische Wert).
- falls der p-Wert kleiner dem vorher festgelegten Signifikanzniveau α ist.

Tests auf Mittelwertsunterschiede: t-Test und Wilcoxon-Rangsummen - Test

1. Ziel, Hypothesen und Voraussetzungen

- Vergleich das emp. Populationsmittel $\bar{x}$ einer Population mit einem hypothetischen Mittelwert μ_0.
- Voraussetzung: Normalverteilung der Stichprobe
- Varianz wird als unbekannt angenommen

Varianten für die Hypothesen:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$H_0 : \bar{x} \leq \mu_0$ gegen $H_1 : \bar{x} > \mu_0$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$H_0 : \bar{x} \geq \mu_0$ gegen $H_1 : \bar{x} < \mu_0$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$H_0 : \bar{x} = \mu_0$ gegen $H_1 : \bar{x} \neq \mu_0$

2. Teststatistik

- Teststatistik

$$T = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \cdot \sqrt{n}$$

- Schätzung der Standardabweichung σ durch:

$$s = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{x} - x_i)^2}{n-1} \right]^{0.5}$$

3. Kritische Bereiche

Kritische Bereiche:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$T > t_{1-\alpha}(n-1)$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$T < t_{\alpha}(n-1)$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$

1. Ziel, Hypothesen und Voraussetzungen

- Vergleiche die emp. Populationsmittel $\bar{x}_1$ und $\bar{x}_2$ miteinander
- Voraussetzung: Normalverteilung der Stichproben
- Varianz der Populationen unbekannt
- 2 Varianten: Varianzen der Populationen gleich oder ungleich

Varianten für die Hypothesen:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$H_0 : \bar{x}_1 \leq \bar{x}_2$ gegen $H_1 : \bar{x}_1 > \bar{x}_2$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$H_0 : \bar{x}_1 \geq \bar{x}_2$ gegen $H_1 : \bar{x}_1 < \bar{x}_2$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$H_0 : \bar{x}_1 = \bar{x}_2$ gegen $H_1 : \bar{x}_1 \neq \bar{x}_2$

2. Teststatistik

- Teststatistik

$$T = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s} \cdot \sqrt{n}$$

- Schätzung der Standardabweichung σ durch:

$$s = \left[\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} \right) \cdot \frac{(n_1 - 1)s_1 + (n_2 - 1)s_2}{n_1 + n_2 - 1} \right]^{0.5}$$

wobei s_1 und s_2 die Standardvarianzschätzer für die Populationen sind

3. Kritische Bereiche

Kritische Bereiche:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$T > t_{1-\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$T < t_{\alpha}(n_1 + n_2 - 2)$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$|T| > t_{1-\alpha/2}(n_1 + n_2 - 2)$

1. Ziel, Hypothesen und Voraussetzungen

- Teste die Differenz $\bar{d} := \sum_{i=1}^{n} d_i = \sum_{i=1}^{n} x_{1i} - x_{2i}$ miteinander gepaarter Stichproben (x_{1i}, x_{2i})
- Typisches Bsp.: Messen eines Blutwertes vor und nach einer med. Behandlung
- Voraussetzung: Normalverteilung der Stichproben

Varianten für die Hypothesen:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$H_0 : d \leq 0$ gegen $H_1 : d > 0$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$H_0 : d \geq 0$ gegen $H_1 : d < 0$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$H_0 : d = 0$ gegen $H_1 : d \neq 0$

2. Teststatistik

- Teststatistik

$$T = \frac{\bar{d}}{s} \cdot \sqrt{n}$$

- Schätzung der Standardabweichung σ durch:

$$s = \left[\frac{\sum_{i=1}^{n} (\bar{d} - d_i)^2}{n-1} \right]^{0.5}$$

3. Kritische Bereiche

Kritische Bereiche:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$T > t_{1-\alpha}(n-1)$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$T < t_{\alpha}(n-1)$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$|T| > t_{1-\alpha/2}(n-1)$

1. Ziel, Hypothesen und Voraussetzungen

- Teste nicht-parametrisch, ob zwei Population den gleichen Median besitzen.
- Zu verwenden, wenn Vor. für den t-Test nicht erfüllt sind
- Benötigt KEINE konkrete Verteilungsannahme
- "t-Test-Ersatz"

Varianten für die Hypothesen:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$H_0 : x_{1,\text{med}} \leq x_{2,\text{med}}$ gegen $H_1 : x_{1,\text{med}} > x_{2,\text{med}}$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$H_0 : x_{1,\text{med}} \geq x_{2,\text{med}}$ gegen $H_1 : x_{1,\text{med}} < x_{2,\text{med}}$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$H_0 : x_{1,\text{med}} = x_{2,\text{med}}$ gegen $H_1 : x_{1,\text{med}} \neq x_{2,\text{med}}$

2. Teststatistik

- Bilde für sämtlichen Beobachtungen $x_{11}, \dots x_{1n1}, x_{21}, \dots x_{2n2}$ Ränge $\text{rg}\ (x_{11}), \dots \text{rg}\ (x_{1n1}), \text{rg}\ (x_{21}), \dots \text{rg}\ (x_{2n2})$
- Teststatistik
$$R = \sum_{i=1}^{n_1} \text{rg}\ (x_{1i})$$
- Wertebereich: $\frac{n_1(n_1+1)}{2} < R < \frac{(n_1+n_2)(n_1+n_2+1)}{2} - \frac{n_1(n_1+1)}{2}$
- Nullverteilung von R liegt tabelliert vor
- Approximation durch die Normalverteilung ab einer Stichprobengröße von ca. 20 möglich

3. Kritische Bereiche

Kritische Bereiche:

(a) **Einseitige Fragestellung 1** :
$R > w_{1-\alpha}(n_1, n_2)$

(b) **Einseitige Fragestellung 2** :
$R < w_{\alpha}(n_1, n_2)$

(c) **Zweiseitige Fragestellung** :
$R > w_{1-\alpha/2}((n_1, n_2))$ oder $R < w_{\alpha/2}(n_1, n_2)$

t-Test und Wilcoxon-Rangsummen - Test in R - Praktische Durchführung

t-Test in R

`t.test(x, y, alternative, paired, var.equal)`

Erklärung der Parameter

- `x,y = NULL`: Die Daten, beim t-Test für eine Population genügt es, `x` anzugeben.
- `alternative = c(”two.sided”, “less”, ”greater”)`: Varianten für die Alternativhypothese
- `var.equal = TRUE`: Gibt an, ob Varianzgleichheit bei den Populationen vorliegt
- `paired`: Gibt an, ob `x` und `y` als gepaarte Stichprobe anzusehen sind

Wilcoxon-Rangsummen - Test in R

```
wilcox.test(x, y, alternative, paired, exact)
```

Erklärung der Parameter

- Parameter fast wie beim t-Test ...
- `exact` : Soll die Teststatistik exakt bestimmt werden, oder per Approximation an die Normalverteilung?

Beispiel

- Nettokaltmieten pro m^2 für 1 (X) und 2-Raum (Y) Wohnungen
- Gibt es einen Unterschied zwischen beiden Gruppen?
- Wir untersuchen diese Frage per Wilcoxon- und t-Test.

	1	2	3	4	5
X	8.70	11.28	13.24	8.37	12.16
Y	3.36	18.35	5.19	8.35	13.10

	6	7	8	9	10
X	11.04	10.47	11.16	4.28	19.54
Y	15.65	4.29	11.36	9.09	

t-Test

```
miete <- read.csv(“Miete.csv”)
attach(miete)
t.test(X,Y, var.equal = FALSE, paired = FALSE)
```

R-Ausgabe:

```
                    Welch Two Sample t-test

data: X and Y
t = 0.5471, df = 14.788, p-value = 0.5925
alternative hypothesis: true difference in means is
not equal to 0
```

=> $p > 0.05$, kein signifikanter Unterschied

Wilcoxon-Rangsummen - Test in R

```
wilcox.test(X,Y, exact = TRUE)
```

R-Ausgabe:

```
                Wilcoxon rank sum test

data: X and Y
W = 51, p-value = 0.6607
alternative hypothesis: true location shift is not
equal to 0
```

=> $p > 0.05$, kein signifikanter Unterschied