Eine Einführung in R: Das Lineare Modell II

Bernd Klaus, Verena Zuber

Institut für Medizinische Informatik, Statistik und Epidemiologie (IMISE),
Universität Leipzig

16. Dezember 2010

I. Modelldiagnose

Wiederholung: Residuenanalyse

Frage: Sind die Voraussetzungen für das lineare Modell erfüllt?
Zu untersuchen sind:

1. Anpassung des Modells an die Daten:
   $\longrightarrow$ Residuen gegen gefittete Wert $\hat{Y}$
2. Normalverteilung des Fehlers:
   $\longrightarrow$ QQ-Plot: Quantile der Residuen gegen die theoretische NV
3. Homoskedastizität des Fehlers:
   $\longrightarrow$ Standardisierte Residuen gegen gefittete Wert $\hat{Y}$,
   wenn die geeignet mit H standardisierten Residuen abhängig von $\hat{Y}$ sind, deutet dies auf ungleiche Varianzen der Fehler hin

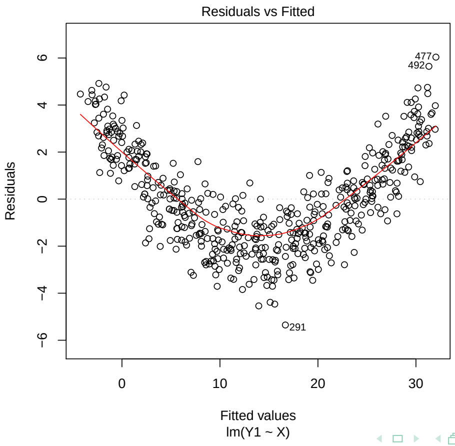
Beispiele: Simulationen

```
h1<-seq(1,6,0.01)
X<-h1+rnorm(length(h1), mean=0, sd=0.1)
```

1. Kein linearer, sondern quadratischer Zusammenhang:
   ```
   epsilon1<-rnorm(length(X), mean=0, sd=1)
   Y1<-X*X+epsilon1
   ```
2. Kein Normal-, sondern gleichverteilter Fehler:
   ```
   epsilon2<-runif(length(X), min=-1, max=1)
   Y2<-X+epsilon2
   ```
3. Die Fehler haben unterschiedliche Varianz, bzw sind abhängig von Y:
   ```
   epsilon3<-rnorm(length(X),
   mean=rep(0,length(X)), sd=X)
   Y3<-X+epsilon3
   ```

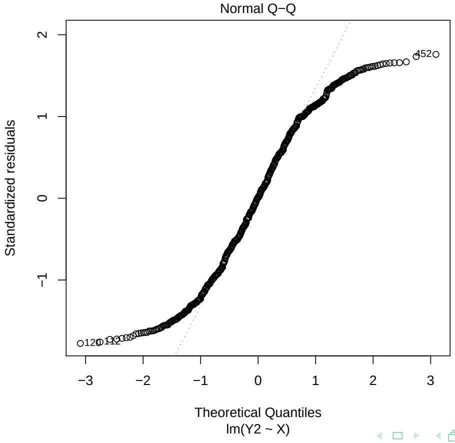
Modelldiagnose in R I: Residuen gegen gefittete Werte

- Residuen gegen gefittete Werte $\hat{Y}$ zur Untersuchung der Anpassung des Modells an die Daten



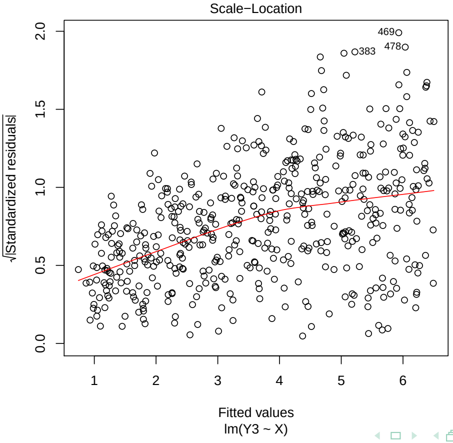
Modelldiagnose in R II: Residuen-QQ

- Plot der studentisierten gegen die theoretischen (NV) Residuen zur Untersuchung der Normalverteilung des Fehlers



Modelldiagnose in R III: Standardisierte Residuen gegen $\hat{Y}$

- Standardisierte, absolute Residuen gegen gefittete Werte $\hat{Y}$ zur Untersuchung der Homoskedastizität des Fehlers



R^2 oder das adjustierte R^2

In der multiplen Regression wird zum R^2 meist auch das adjustierte R^2 ausgegeben:

$$R^2_{adjust} = R^2 - \frac{p - (1 - R)}{n - p - 1}$$

Dann können auch Modelle verglichen werden, die eine unterschiedliche Zahl p an Variablen besitzen.

Weitere Kriterien sind Akaike Information Criterione (AIC), Baysian Information Criterion (BIC) und viele mehr!

II. Interpretation der Koeffizienten

Metrische erklärende Variablen

- Der Regressionskoeffizient β_j einer Variable X_j gibt deren Einfluss auf die Zielgröße Y unter gleichzeitiger Kontrolle der anderen Variablen an.
- Bei einer metrischen Variable X_j gilt:
  (Gegeben die übrigen $(p-1)$ Variablen werden festgehalten)
  Wenn sich X_j um eine Einheit erhöht, so verändert sich Y um β_j Einheiten.
- Beispiel: Datensatz "airquality"

$$\texttt{Ozone}_i = -145.7 + 2.27847 \cdot \texttt{Temp}_i + 0.05711 \cdot \texttt{Solar.R}_i + \varepsilon_i$$

- "Wenn die Temperatur (bei gegebener Sonneneinstrahlung) um eine Einheit steigt, steigt die Ozonkonzentration um ca. 2.3 Einheiten"

Kategoriale erklärende Variablen

- Warnung: Kategoriale Variablen X_j können nicht wie metrische interpretiert werden!
- Vorgehensweise:
  1. Wähle eine Kategorie als Referenz
  2. Führe binäre Variablen ("Dummyvariablen") ein, die angeben, ob eine Beobachtung in die Referenzkategorie oder in eine andere Kategorie fällt
  3. Wenn k Kategorien vorliegen, müssen $k-1$ Dummyvariablen konstruiert werden
  4. Interpretation:
     (Gegeben die übrigen $(p-1)$ Variablen werden festgehalten)
     Wenn eine Beobachtung nicht in die Referenzkategorie fällt, so verändert sich Y um β_j Einheiten
- Deswegen ist es in R essentiell, kategoriale Variablen als Faktoren zu führen (dann berechnet R die Dummyvariablen automatisch)

Beispieldaten: "Work"

Untersuchung verschiedener Einflussfaktoren (COMP, RTW, PVT) auf den prozentualen Anteil der Beschäftigten im öffentlichen Sektor DENS, die in einer Gewerkschaft organisiert sind, in verschiedenen amerikanischen Bundesstaaten.

- Metrische Variablen:
  - DENS: *Percent of public sector employees in unions, 1982*
  - PVT: *Percent of private sector employees in unions, 1982*
- Kategoriale Variablen:
  - COMP: *State bargaining laws cover public employees (1) or not (0)* (Referenzkategorie: Keine Rechte)
  - RTW: *State right-to-work law (1) or not (0)*

Zunächst ist folgendes lineares Modell von Interesse:

$$\mathtt{DENS}_i = \beta_0 + \alpha_{RTW_i} + \beta_1 \cdot \mathtt{PVT}_i + \varepsilon_i$$

Beispieldaten: "Work"

- `Work <- read.table("Work.csv", header = TRUE)`
- Umwandlung von `RTW` in einen Faktor
  `Work$RTW <- as.factor(Work$RTW)`
- `test <- lm(DENS ~ RTW + PVT, data = Work)`

Ausgabe in R:

```
 Coefficients:
(Intercept)    RTW1      PVT
35.3881       -10.8599   0.1418
```

Interpretation von α_{RTW}: Gibt es ein "Recht auf Arbeit", so verringert sich der Anteil der im öffentlichen Dienst in einer Gewerkschaft organisierten Beschäftigten um ca. 11%

Testen der Regressionskoeffizienten

Der standardisierte Regressionskoeffizient ist t-verteilt mit einer Freiheitsgradzahl, die sich aus dem Stichprobenumfang n und der Variablenzahl p bestimmt:

$$T_j = \frac{\hat{\beta}_j}{\mathrm{SD}(\hat{\beta}_j)} \quad \sim t(n-p-1)$$

$\mathrm{SD}(\hat{\beta}_j)$: Standardabweichung von $\hat{\beta}_j$

- $H_0 : \beta = 0$ ablehnen, falls $|T_j| > t_{1-\alpha/2}(n-p-1)$
- $H_0 : \beta > 0$ ablehnen, falls $T_j < t_\alpha(n-p-1)$
- $H_0 : \beta < 0$ ablehnen, falls $T_j > t_{1-\alpha}(n-p-1)$

`R` gibt in der `summary` sowohl die β's (`estimate`), deren Standardabweichung (`Std. Error`) und t-Statistik (`t value`) und p-Wert (`Pr(>|t|)`) an.

Interaktionen

- Das Modell "test" besitzt nur ein R^2 von 0.25
- Wahrscheinlich sind wichtige Einflussfaktoren noch nicht berücksichtigt !
- Wir untersuchen daher das Modell:

$$\texttt{DENS}_i = \beta_0 + \alpha_{RTW_i} + \alpha_{COMP_i} + \alpha_{COMP_i * RTW_i} + \beta_1 \cdot \texttt{PVT}_i + \varepsilon_i$$

- Der Koeffizient $\alpha_{COMP_i * RTW_i}$ beschreibt eine multiplikative Interaktion der Faktoren `COMP` und `RTW`
- D.h. dieser Effekt besteht, wenn gleichzeitig Recht auf Arbeit UND Tarifverhandlungen der Gewerkschaftsmitglieder im öffentlichen Dienst gegeben sind.

Interaktionen - Umsetzung in R

- Das erweiterte Modell

$$\mathtt{DENS}_i = \beta_0 + \alpha_{RTW_i} + \alpha_{COMP_i} + \alpha_{COMP_i * RTW_i} + \beta_1 \cdot \mathtt{PVT}_i + \varepsilon_i$$

- Aufruf der Funktion `lm()`
- `testI <- lm(DENS ~ COMP*RTW + PVT, data = Work)`

Ausgabe in R:

```
Coefficients:
(Intercept)      COMP1       RTW1        PVT    COMP1:RTW1
   27.31371   14.92008   -0.58751    0.04727   -18.387[illegible]3
```

Interaktionen - Interpretation der Ergebnisse

- `COMP1`: Gibt es ein Recht auf Tarifverhandlungen der Gewerkschaftsmitglieder im öffentlichen Dienst, aber KEIN Recht auf Arbeit, STEIGT der Anteil der öffentlich Beschäftigten, die gewerkschaftlich organisiert sind, um ca. 14.9%.
- `RTW1`: Gibt es ein Recht auf Arbeit, aber KEIN Recht auf Tarifverhandlungen der Gewerkschaftsmitglieder im öffentlichen Dienst, SINKT der Anteil der öffentlich Beschäftigten, die gewerkschaftlich organisiert sind, marginal um 0.6%.
- `COMP1:RTW1`: Gibt es aber sowohl ein Recht auf Arbeit, als auch auf Tarifverhandlungen der Gewerkschaftsmitglieder im öffentlichen Dienst, so SINKT der Anteil der öffentlich Beschäftigten, die gewerkschaftlich organisiert sind, um ca. $18.4\% + 0.6\% - 14.9\% = 3.5\%$

III. Prädiktion

Vorhersage im Linearen Modell

- Gegeben: Lineares Modell mit Regressionskoeffizienten, die auf Basis bestehender Daten ermittelt wurden
- Neu: Eine neue Beobachtung X_{n+1} deren Zielgröße Y_{n+1} unbekannt ist
- Ziel: Vorhersage der unbekannten Zielgröße Y_{n+1}

Vorgehensweise zur Vorhersage:

- Bilde eine Vorhersageregel (*prediction rule*) aus dem gegeben Modell
- Setze die Werte der neuen Beobachtung X_{n+1} in diese Vorhersageregel ein und berechne die Vorhersage $\hat{Y}_{n+1}$

Beispiel: *Airquality*-Daten

- Gegeben: Lineares Modell mit Regressionskoeffizienten aus dem Datensatz “airquality”

$$\texttt{Ozone}_i = -145.7 + 2.27847 \cdot \texttt{Temp}_i + 0.05711 \cdot \texttt{Solar.R}_i + \varepsilon_i$$

- Neu: 3 neue Beobachtungen X_{n+1} `newdata`, deren Zielgröße Y_{n+1} unbekannt sind

Ozone	Solar.R	Temp
?	80	110
?	80	112
?	80	114

- Ziel: Vorhersage der unbekannten Zielgröße Y_{n+1}

Beispiel: *Airquality*-Daten

- Berechnung der Vorhersageregel `air`:
  `air <- lm( formula= Ozone ~ Temp + Solar.R, data= airquality)`
- Vorhersage der Temperatur für `newdata` mit Hilfe des Modells `air` mit dem R-Aufruf: `predict(air,newdata)`
- Dies ergibt folgende Vorhersagen:

Ozone	Solar.R	Temp
109.4970	80	110
114.0539	80	112
118.6108	80	114