Grundbegriffe der medizinischen Biometrie und Epidemiologie (Sommer 2011)

Übungsblatt 4 am 19.5.2011

1 Aufgabe: Konfidenzintervall für μ

Betrachtet wird eine unabhängig und identisch normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

1. Zunächst soll die Varianz σ^2 als bekannt vorausgesetzt sein.
   Mittels der Zufallsstichprobe $X_1, ..., X_n$ soll ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α konstruiert werden.

2. In der Praxis ist die Varianz jedoch unbekannt und muss geschätzt werden.
   Bestimmen Sie auch für diesen Fall mittels der Zufallsstichprobe $X_1, ..., X_n$ ein Konfidenzintervall für den Erwartungswert μ mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α.

3. Verspätungen der Deutschen Bahn:
   Die Stiftung Warentest hat an einigen deutschen Bahnhöfen den Prozentsatz der verspäteten Züge (Verspätungen größer 4 Minuten) beobachtet. In der folgenden Tabelle finden Sie die Ergebnisse einer Stichprobe von $n = 94\,136$ Zügen im Herbst 2007:

Stadt	Prozentsatz
Berlin	25
Hannover	28
Hamburg	35
München	33
Leipzig	16
Dresden	35
Mannheim	29
Stuttgart	23
Frankfurt	34
Köln	36

   Berechnen Sie aus dieser Stichprobe den mittleren Prozentsatz der verspäteten Züge für Deutschland und geben Sie das zugehörige Konfidenzintervall mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 0.05 an. Interpretieren Sie die Ergebnisse!

2 Aufgabe: Schätzer für den Mittelwert

Eine Grundgesamtheit besitze Mittelwert μ und Varianz σ^2. Die Stichprobenvariablen $X_1, ..., X_5$ sind unabhängige Ziehungen aus der Grundgesamtheit. Man betrachte folgende fünf Schätzer für den Mittelwert μ:

- $$T1 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + ... + X_5)$$
- $$T2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$
- $$T3 = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5$$
- $$T4 = X_1 + X_2$$
- $$T5 = X_1$$

1. Welcher Schätzer ist erwartungstreu?
2. Welchen Schätzer würden Sie verwenden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

3 Aufgabe: Likelihood im diskreten Fall

Betrachten Sie die folgende Situation mit zwei fairen Würfeln:

- W_1 mit 5 roten und einer weißen Seite
- W_2 mit einer roten und 5 weißen Seiten

Wir wählen nun einen der Würfel zufällig aus und werfen ihn wiederholt bis die Farbe rot zum ersten Mal erscheint. Dieses Experiment wird mit dem selben Würfel noch zweimal wiederholt. Wir erhalten die folgenden Ergebnisse

1. Das erste Rot erscheint nach dem dritten Wurf
2. Das erste Rot erscheint nach dem fünften Wurf
3. Das erste Rot erscheint nach dem vierten Wurf

Stellen Sie die Likelihoodfunktion für den Parameter p: *'die Wahrscheinlichkeit, rot zu würfeln'* auf und weisen Sie mit Hilfe der Likelihoodfunktion nach, dass dieser Ausgang des Experiments darauf schließen lässt, dass Würfel 2 verwendet wurde.

Übungsleiter:
Bernd Klaus (Dipl. Wi-Math) Mail: *bernd.klaus@uni-leipzig.de*
Verena Zuber (M.Sc.) Mail: *vzuber@uni-leipzig.de*