Grundbegriffe der medizinischen Biometrie und Epidemiologie (Sommer 2011)

Übungsblatt 3 am 12.5.2011

1 Aufgabe: Maximum Likelihood Schätzung

Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die folgende Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2\}$$

Nun werden insgesamt n unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Stichprobenelemente $x_1, ..., x_n$ beobachtet.

1. Man bestimme die (log)Likelihood-Funktion $f(x; \mu, \sigma^2)$ der Parameter μ und σ^2 für die Beobachtungen $x_1, ..., x_n$.
2. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten Mittelswertsparameter μ.
3. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekannten Varianzparameter σ^2.

2 Aufgabe: Erwartungstreue

Gegeben sei eine unabhängig und identisch verteilte Zufallsstichprobe $X_1, ..., X_n$.

1. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei bekannt und $\sigma^2 = Var(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

2. Der Erwartungswert $E(X) = \mu$ sei unbekannt und $\sigma^2 = Var(X)$ soll geschätzt werden. Bestimmen Sie den Erwartungswert der folgenden Varianzschätzung und geben Sie an, ob der Schätzer erwartungstreu ist:

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

Mit dem Mittelwertschätzer $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$

3. Leiten Sie nun mithilfe des Teilergebnisses 2.2 den erwartungstreuen Schätzer (Stichprobenvarianz) für die Varianz bei unbekanntem Mittelwert her.

3 Aufgabe: Gleichverteilung

Eine stetige Zufallsvariable X heißt gleichverteilt auf dem Intervall $[a, b]$, kurz $X \sim U(a, b)$ falls für ihre Dichte gilt:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b; \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Weisen Sie nach, dass die Verteilungsfunktion einer gleichverteilten Zufallsvariable X wie folgt gegeben ist:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a; \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \leq x \leq b; \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie, dass $E(X) = (b + a)/2$ und $\mathrm{Var}(X) = (b - a)^2/12$ gilt.

Hinweis: Benutzen Sie zur Berechnung der Varianz den Zusammenhang $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(c) Gegeben sei eine unabhängige Stichprobe $x_1, x_2, \ldots, x_n$ einer Gleichverteilung auf dem Intervall $[-a, a]$ $(a > 0)$. Weisen Sie nach, dass $T = \frac{3}{n}(X_1^2 + \ldots + X_n^2)$ ein unverzerrter Schätzer für a^2 ist.

Übungsleiter:
Bernd Klaus (Dipl. Wi-Math) Mail: *bernd.klaus@uni-leipzig.de*
Verena Zuber (M.Sc.) Mail: *vzuber@uni-leipzig.de*