

1 Aufgabe: Maximum Likelihood Schätzung

Eine normalverteilte Zufallsvariable $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ besitzt die folgende Dichte:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}$$

Nun werden insgesamt n unabhängige und identisch verteilte (i.i.d.) Stichprobenelemente x_1, \dots, x_n beobachtet.

1. Man bestimme die (log)Likelihood-Funktion $f(x; \mu, \sigma^2)$ der Parameter μ und σ^2 für die Beobachtungen x_1, \dots, x_n .
2. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekanntem Mittelwertparameter μ .
3. Man bestimme mittels der ersten Teilaufgabe den Maximum Likelihood Schätzer für den unbekanntem Varianzparameter σ^2 .

2 Aufgabe: Likelihood im diskreten Fall

Betrachten Sie die folgende Situation mit zwei fairen Würfeln:

- W_1 mit 5 roten und einer weißen Seite
- W_2 mit einer roten und 5 weißen Seiten

Wir wählen nun einen der Würfel zufällig aus und werfen ihn wiederholt bis die Farbe rot zum ersten Mal erscheint. Dieses Experiment wird mit dem selben Würfel noch zweimal wiederholt. Wir erhalten die folgenden Ergebnisse

1. Das erste Rot erscheint nach dem dritten Wurf
2. Das erste Rot erscheint nach dem fünften Wurf
3. Das erste Rot erscheint nach dem vierten Wurf

Stellen Sie die Likelihoodfunktion für den Parameter p : 'die Wahrscheinlichkeit, rot zu würfeln' auf und weisen Sie mit Hilfe der Likelihoodfunktion nach, dass dieser Ausgang des Experiments darauf schließen lässt, dass Würfel 2 verwendet wurde.

3 Aufgabe: Schätzer für den Mittelwert

Eine Grundgesamtheit besitze Mittelwert μ und Varianz σ^2 . Die Stichprobenvariablen X_1, \dots, X_5 sind unabhängige Ziehungen aus der Grundgesamtheit. Man betrachte folgende fünf Schätzer für den Mittelwert μ :

•

$$T1 = \frac{1}{5}(X_1 + X_2 + \dots + X_5)$$

•

$$T2 = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$$

•

$$T3 = \frac{1}{8}(X_1 + X_2 + X_3 + X_4) + \frac{1}{2}X_5$$

•

$$T4 = X_1 + X_2$$

•

$$T5 = X_1$$

1. Welcher Schätzer ist erwartungstreu?
2. Welchen Schätzer würden Sie verwenden? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

Übungsleiter:

Bernd Klaus (Dipl. Wi-Math) Mail: *bernd.klaus@uni-leipzig.de*

Verena Zuber (M.Sc.) Mail: *vzuber@uni-leipzig.de*